Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 4
Abgabe: 15.11. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei K ein reell abgeschlossener Körper und $P(T) = \sum_{k=0}^{n} c_k T^k$ ein Polynom in $K[T]$ derart, dass $P(a) = P(b) = 0$ für zwei Elemente $a < b$ aus K. Zeige, dass die formale Ableitung

$$P'(T) = \sum_{k \geq 1}^{n} c_k \cdot k \cdot T^{k-1}$$

eine Nullstelle im Intervall (a, b) besitzt. Insbesondere gilt der Satz von Rolle für polynomiale Funktionen in jedem reell abgeschlossenen Körper.
Hinweis: Polynomdivision.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Schließe aus Aufgabe 1, dass der Mittelwertsatz für polynomiale Funktionen in jedem reell abgeschlossener Körper gilt: Gegeben ein Polynom $P(T)$ über einem reell abgeschlossenen Körper K und zwei Elemente $a < b$ aus K gibt es einen Punkt c im Intervall (a, b) mit

$$P'(c) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}.$$

Insbesondere ist P streng monoton wachsend im Intervall $[a, b]$, wenn die Ableitung P' echt positiv im Intervall (a, b) ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
In einem reell abgeschlossenen Körper K sei P ein Polynom mit genau m vielen Monomen, also

$$P(T) = a_1 T^{n_1} + \cdots + a_m T^{n_m} \text{ mit } n_1 < \ldots < n_m.$$

a) Zeige, dass die (echt) positiven Nullstellen von P in K genau den positiven Nullstellen des Polynoms $Q(T) = a_1 + \sum_{i=2}^{m} a_i T^{n_i - n_1}$ entsprechen.

b) Wie viele Monome hat Q'?

c) Wenn die Ableitung eines Polynoms r viele positive Nullstellen besitzt, wie viele positive Nullstellen kann das Polynom selbst höchstens besitzen?

d) Schließe daraus per Induktion über m, dass P höchstens $m-1$ positive Nullstellen in K besitzen kann.

Insbesondere besitzt das Polynom $T^{10^{10^{10}}} - 30T^3 + 1$ höchstens zwei positive Nullstellen in jedem reell abgeschlossenen Körper.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.